**Тема 3.3. Симплекс–метод решения ЗЛП**

Мы познакомимся с методом решения задачи линейного программирования, основанном на таком переборе вершин многогранного множества планов, при котором план постоянно улучшается. Этот метод называют также симплекс–методом или методом последовательного улучшения плана; это название связано с некоторыми сторонами геометрического смысла метода и более распространено из-за своей краткости.

*Канонической формой* задачи линейного программирования называется такая форма, при которой все ограничения задачи, кроме требования неотрицательности переменных, являются уравнениями.

С помощью увеличения числа переменных любую задачу линейного программирования можно записать в канонической форме. Пусть среди ограничений задачи имеется неравенство . Введем новую переменную . Тогда это неравенство можно заменить условиями , . Поступив таким образом со всеми неравенствами, не сводящимися к требованиям неотрицательности переменных, мы получим задачу в канонической форме.

В некотором смысле каноническая форма является неэкономной – в ней очень много переменных. Но эта особенность канонической формы является и ее достоинством, поскольку представляет большой простор для выбора свободных переменных, что важно для метода, к изучению которого мы приступаем.

**Пример.** Запишем в канонической форме задачу из пункта III.1:



.

Целевая функция:

.

*Описание метода.* Будем решать задачу отыскания . Случай  приводится к этому с помощью замены целевой функции  на функцию .

Метод последовательного улучшения плана применяется к задаче, записанной в канонической форме. Приведем задачу к этой форме и все переменный обозначим . Будем считать, что система уравнений, входящих в ограничения задачи, имеет бесчисленное множество решений. Выделим группу свободных переменных (пусть это будут первые  переменных ) и выразим через них остальные переменные:

 (7)

. Подставив эти выражения в целевую функцию, представим ее в форме

 (8)

Будем предполагать, что  Взяв все свободные переменные равными нулю, получим набор , удовлетворяющий всем ограничениям задачи и, следовательно, являющийся планом. Этому плану отвечает значение целевой функции .

Займемся отысканием плана с меньшим значением . Возможны три случая.

1. Все числа  неотрицательны. Из выражения (8) видно, что в этом случае , т.к. . Найденный план является оптимальным. Решение задачи заканчивается.

2. Среди чисел  есть отрицательные. Предположим для определенности, что . Тогда значение  можно уменьшать, увеличивая  и оставляя переменные  равными нулю. Формулы (7) дадут при этом

 (9)

Пусть все числа  неотрицательны. Тогда при неограниченном росте  переменные  будут оставаться неотрицательными, так что набор  всегда будет планом. При этом значение целевой функции, равное , будет неограниченно уменьшаться, т.к. .

Таким образом, в этом случае множество планов неограниченно, а задача оптимизации не имеет решения (план можно бесконечно улучшать). Решение задачи заканчивается.

3. Среди чисел  есть отрицательные (для определенности ). Среди чисел  есть отрицательные. Опять, оставляя  равными нулю, будем увеличивать . Вновь будут выполняться формулы (9). Назовем  наибольшее значение , при котором выполняется условие неотрицательности всех переменных . Очевидно,  можно найти следующим образом: надо решить (относительно ) все уравнения , в которых , и из корней выбрать наименьший. Возьмем , значения остальных переменных найдем из формул (9). При этом, по крайней мере одно значение  будет равно нулю. Полученный набор переменных будет планом, значение целевой функции для этого плана равно . Если , то новый план лучше исходного: , так как . Если же  (что также возможно), то новый план совпадает с исходным.

Изменим совокупность свободных переменных: выведем из нее  и введем . Чтобы получить выражения переменных и целевой функции через новые свободные переменные, возьмем то из равенств (7), которое дает выражение . Коэффициент при  в этом равенстве отличен от нуля (в силу выбора номера  он отрицателен), поэтому из этого равенства можно выразить  через . Вставив в остальные равенства (7) и целевую функцию (8), мы получим требуемые формулы.

Построенный нами новый план характерен тем, что в нем зна­чения всех новых свободных переменных равны нулю. Поэтому мож­но провести такие же построения, какие были проведены с исход­ным планом. Вновь представится одиниз трех случаев: в первых двух решение будет закончено, в третьем снова сменим состав свободных переменных и т.д.

В повторении описанной процедуры и состоит метод последова­тельного улучшения плана. Нетрудно понять геометрический смысл этого метода: если фиксировать какой-нибудь набор свободных переменных и рассмотреть многограннее множество планов в про­странстве этих переменных, то последовательному улучшению пла­на соответствует перебор вершин этого многогранного множества. Убедиться в этом можно, сравнив описанный способ получения планов со способом отыскания вершин, приведенным в конце предыдущего пункта.

Отсюда вытекает, что метод последовательного улучшения пла­на всегда приведет к цели: либо будет найден оптимальный план (представится первый случай), либо будет установлена неразреши­мость задачи (представится второй случай). При этом будет затрачено значительно меньше труда,чем при слепом переборе вершин. Это связано с целенаправленностью действий и с хорошо организованным способом перехода от одной вершины к другой.

Заметим, что в третьем случае, когда  происходит задержка в переборе планов. Анализ, который приводиться не будет, показывает, что после одной или нескольких замен совокупности свободных переменных движение всегда можно возобновить: получится либо первый или второй случая, либо третий, но уже с .

Метод последовательного улучшения плана очень удобен для практических расчетов. Все формулы, связанный с применением этого метода, легко могут быть выписаны, наих основе разработаны компактные расчетные схемы, при которых расчеты сводятся в так называемые симплекс-таблицы. Также созданы программы для реализации этого метода на ЭВМ.

**Пример.** Решим методом последовательного улучшения плана задачу из предыдущих пунктов, которая была записана в канонической форме:

Необходимо найти минимум целевой функции:

.

При ограничениях:



.

**Решение.** В качестве свободных переменных выберем  и . Тогда





Первоначальный план

, .

Так как среди коэффициентов при неизвестных в целевой функции есть отрицательные числа, то первоначальный план не является оптимальным и его можно улучшить. Полагаем  и увеличиваем  до значения  (т.к. ).

Новый план:

, .

Проверим план на оптимальность. Выбираем новые свободные переменные:  и . Тогда





Так как среди коэффициентов при неизвестных в целевой функции есть отрицательное число, то данный план не является оптимальным и его можно улучшить. Полагаем  и увеличиваем  до значения  (т.к. ).

Новый план:

, .

Проверим план на оптимальность. Выбираем новые свободные переменные:  и . Тогда





Так как среди коэффициентов при неизвестных в целевой функции нет отрицательных чисел, то найденный план  является оптимальным. Минимум целевой функции



Т.е. на ремонт всей техники необходимо потратить 14800 условных денежных единиц. При этом продолжительность ремонта не превысит 1200 часов.

**Упражнения.**

1. Решить аналитическим симплекс–методом задачи линейного программирования:

 

2. Решить аналитическим симплекс–методом задачи, сформулированные в пункте 3.1.